EXERCICE№12

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases} , n \in \mathbb{N}^*$$

1) démonstartion par reccurence:

* pour n=1 , $U_1 = 1 \leq 3$ (vrai)

* supposons que : $U_n \leq 3$ et montrons que : $U_{n+1} \leq 3$

$U_n \leq 3 \Rightarrow 3.U_n \leq 9 \Rightarrow \sqrt{3.U_n} \leq 3 \Rightarrow U_{n+1} \leq 3$

conclusion : $U_n \leq 3 \ ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) $U_{n+1} - U_n = \sqrt{3.U_n} - U_n = \dfrac{3U_n - U_n^{\,2}}{\sqrt{3.U_n} + U_n} = \dfrac{U_n(3 - U_n)}{\sqrt{3.U_n} + U_n}$

on a : $U_n > 0$ et $3 - U_n \geq 0$ d'où $U_{n+1} - U_n \geq 0 \quad \Rightarrow U_n \leq U_{n+1}$

par suite : (U_n) est croissante

3) (U_n) est croissante et majorée par 3 elle est donc convergente

* soit ℓ sa limite

(U_n) est croissante $\Rightarrow U_n \geq U_1 \Rightarrow U_n \geq 1$ Donc $1 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \ell \leq 3$

* $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \sqrt{3x}$ f est continue sur $[1,3]$ d'où $\ell = f(\ell)$

$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \sqrt{3\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 3\ell \Leftrightarrow \ell(\ell - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 3$, $0 \notin [1,3]$ d'où $\ell = 3$

conclusion : $\lim U_n = 3$

EXERCICE№13

1) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0$

f est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ d'où

$$f(]0,+\infty[) = \left]\lim_{+\infty} f, \lim_{0^+} f\right[=]1,+\infty[$$

x	0	$+\infty$
f'(x)	-	
f(x)	$+\infty$ ↘	1